Практикалық сабақ №6

Тақырыбы: Кез келген облыс бойынша екі еселі интеграл.

Мақсаты: Кез келген облыс бойынша екі еселі интегралды есептеу. Қисықсызықты облыс жағдайында екі еселі интегралды қайталанған интегралға келтіру.

Мысал 1. $y = x^2$, $x = y^2$ параболарымен шектелген D облысында $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз.

Шешуі: D облысының төменгі шекарасы $y = x^2$ ал жоғары шекарасы $x = y^2$, яғни $y = \sqrt{x}$, мұндағы радикал алдына "+" таңбасы қойылады, өйткені D облысы xOy жазықтығының $y > 0$ бөлігінде орналасқан x – тің [0,1] кесіндісіндегі кезкелген бекітілген мәнінде y $y = x^2$ – тан $y = \sqrt{x}$ не дейін өзгереді.

Сондықтан

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y}dy = \int_0^1 x(\ln y)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x(\ln\sqrt{x} - \ln x^2)dx =$$

$$= \int_0^1 x(\frac{1}{2}\ln x - 2\ln x)dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 x\ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{dx}{x}\right) = \left|\lim_{x\to 0} x^2\ln x = 0\right| = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

Мысал 2. $y^2 = 2x,\quad x + y = 4,\quad x + y = 12$ сызықтарымен шенелген D облысында $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ екі еселі интегралын есептеңіз.

Шешуі:

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

теңдеулер жүйелерін шешіп, сәйкесінше $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ және $x_1 = 8$, $x_2 = 18$ аламыз. Сондықтан D облысын $D = D_1 \cup D_2$ түрінде жазамыз, мұнда

$$D_1 = \{(x,y) \in R^2 :\ 2 \le x \le 8,\ 4 - x \le y \le \sqrt{2x}\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in R^2 :\ 8 \le x \le 18,\ -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x\}.$$

Екі еселі интегралдың қасиеттерін қолданып және қайталанған интегралдарға көшіп,

$$I = \iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy = \int_2^8 dx\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)dy + \int_8^{18} dx\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^8 (x+y)^2\Big|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}} dx + \frac{1}{2}\int_8^{18}(x+y)^2\Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x} dx = \int_2^8\left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} + x - 8\right)dx +$$

$$+\int_{8}^{18}\left(72-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-x\right)dx=543\frac{11}{15}$$ аламыз.

Аудиториялық жұмысы: Екі еселі интегралды есептеу: [8] 3924-3930 (жұп), 3932, 3935.

Үй жұмысы

3925-3931 (тақ), 3933, 3936.